

$$P_t(t) = v(y)e^{-v(y)t} \quad (2.1-9.7)$$

La pérdida anual esperada esta definida como el valor medio de la suma de pérdidas en un año. Esta puede calcularse de la siguiente manera:

$$\bar{y} = v(0) \int_0^{\infty} yp(y)dy \quad (2.1-9.8)$$

donde  $p(y)$  esta dado en la ecuación 2.1-9.4. Reemplazando 2.1-9.4 en 2.1-9.8 conduce a:

$$\bar{y} = - \int_0^{\infty} y \frac{dv(y)}{dy} dy = - \int_0^{\infty} ydv(y) \quad (2.1-9.9)$$

La ecuación 2.1-9.9 muestra que la pérdida anual esperada puede ser calculada mediante la integración de la curva de tasas de excedencia de perdidas.

La pérdida anual esperada en el campo de los seguros se le conoce como la prima pura o prima técnica. Es el valor esperado de la pérdida que se tendría en un año cualquiera, suponiendo que el proceso de ocurrencia de los eventos es estacionario y que a las estructuras dañadas se les restituye su resistencia inmediatamente después del evento (Esteva 1970).

### Apéndice 2.1-10 Cómo tener en cuenta las incertidumbre en las funciones de vulnerabilidad

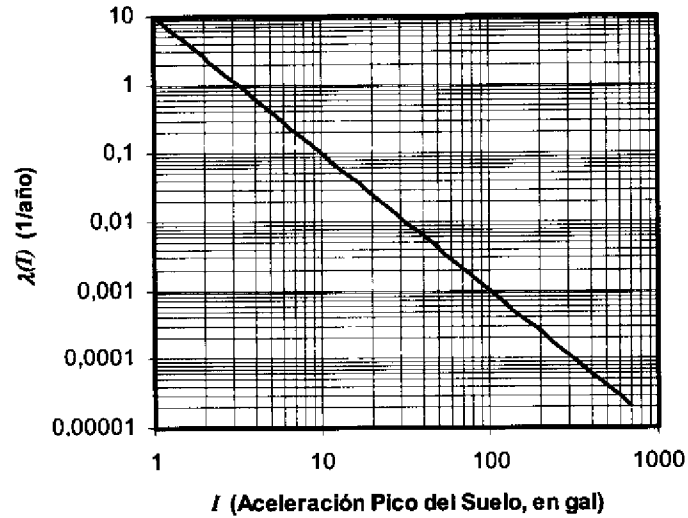
Tal como está indicado en el Apéndice 2.1-9, la tasa de excedencia de las pérdidas puede calcularse con la siguiente expresión:

$$v(y) = \int_0^{\infty} - \frac{d\lambda(I)}{dI} \Pr(Y > y | I) dI \quad (2.1-10.1)$$

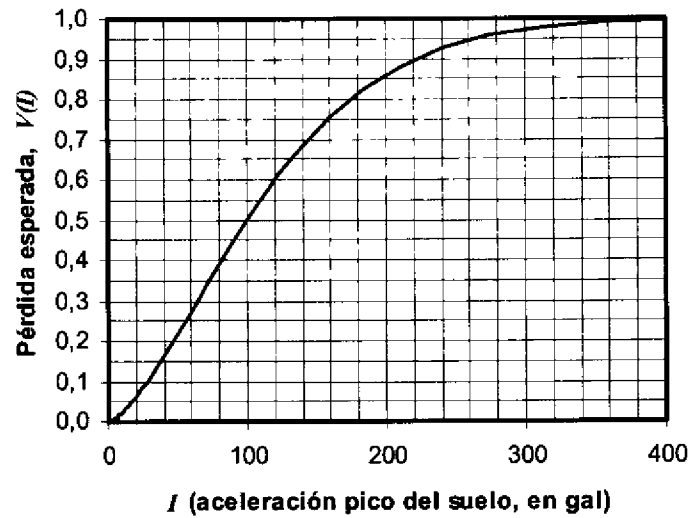
donde  $\lambda(I)$  es la tasa de excedencia de intensidades y  $\Pr(Y > y | I)$  es la probabilidad de que las pérdidas sean mayores que  $y$  dado que se presente un evento con intensidad  $I$ . La figura 2.1-10.1 representa un ejemplo de  $\lambda(I)$ , que hace referencia a la amenaza sísmica; en este caso,  $I$  significa aceleración de pico de suelo.

Sea  $V(I)$  la función de vulnerabilidad; es decir, el valor esperado de la pérdida dado que se ha presentado un evento con intensidad  $I$ . Si la función de vulnerabilidad fuese determinística, entonces, dado un evento con intensidad  $I$ , la pérdida sería exactamente igual a su valor esperado,  $V(I)$ , sin incertidumbre. La figura 2.1-10.2 da un ejemplo de una función de vulnerabilidad para terremoto.

**Figura 2.1-10.1 Ejemplo de tasa de excedencia de intensidades,  $\lambda(I)$**



**Figura 2.1-10.2 Ejemplo de una función de vulnerabilidad para terremoto**



En el caso de una función de vulnerabilidad determinística,

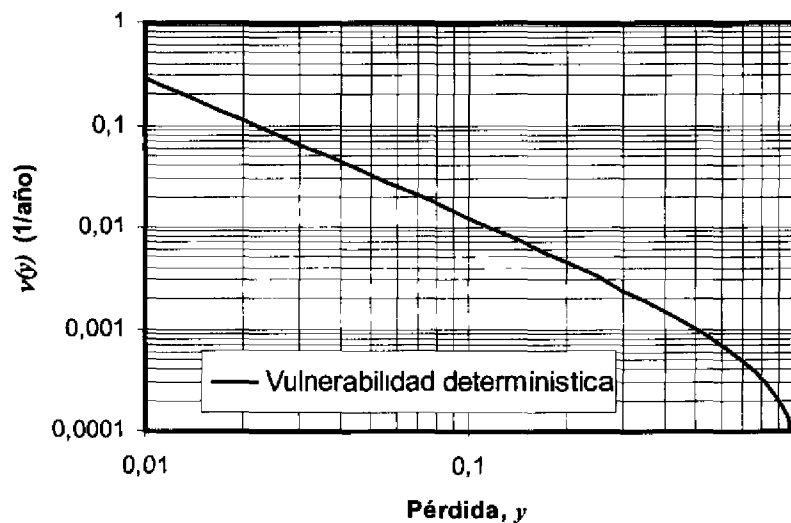
$$\Pr(Y > y | I) = \begin{cases} 0 & \text{if } I < I_c(y) \\ 1 & \text{if } I \geq I_c(y) \end{cases} \quad (2.1-10.2)$$

donde  $Ic(y)=V^{-1}(y)$  es la intensidad que (determinísticamente) produce una pérdida igual a  $y$ . Reemplazando 2.1-10.1 en 2.1-10.2, se obtiene:

$$v(y) = - \int_{Ic(y)}^{\infty} d\lambda(I) = -[\lambda(\infty) - \lambda(Ic(y))] = \lambda[Ic(y)] \quad (2.1-10.3)$$

En otras palabras, la tasa de excedencia de la pérdida  $y$  es igual a la tasa de excedencia de la intensidad que, determinísticamente, produce una pérdida igual a  $y$ . La Figura 2.1-10.3 presenta un ejemplo de la tasa de excedencia de la pérdida  $y$ , calculada utilizando la tasa de excedencia de intensidades y las curvas de vulnerabilidad con la forma de las figuras 2.1-10.1 y 2.1-10.2, respectivamente.

**Figura 2.1-10.3 Tasa de excedencia de pérdidas,  $y$ , calculada con la tasa de excedencia de intensidades y las curvas de vulnerabilidad, figuras 2.1-10.1 y 2.1-10.2, respectivamente. La vulnerabilidad ha sido asumida en forma determinística.**



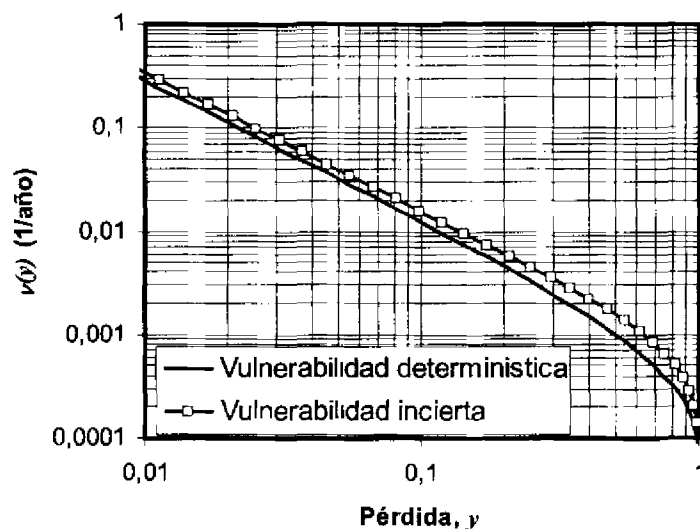
No obstante, las funciones de vulnerabilidad no son determinísticas, y la incertidumbre subyacente se debe ser valorar. Esto se puede hacer formalmente calculando la integral dada en la ecuación 2.1-10.1, la cual necesitaría un detallado conocimiento de las distribuciones de probabilidad de los estados dañado, o la “fragilidad” de la estructura. Para continuar con el ejemplo, se asume que la fragilidad estructural es conocida, y dada en los siguientes términos. El valor esperado de las pérdidas para una intensidad dada será de nuevo la función de vulnerabilidad de la figura 2.1-10.2.

La desviación estándar de las pérdidas dada una intensidad será descrita por:

$$\sigma(I) = V(I)[1 - V(I)] \quad (2.1-10.4)$$

Aún más, se asume que, dada una intensidad, las pérdidas tienen una distribución Beta con el valor esperado y la variante ya definida. Bajo estas suposiciones, y teniendo en cuenta las incertidumbres en las relaciones de vulnerabilidad, se obtiene la curva de tasas de excedencia de pérdida de la figura 2.1-10.4, donde se compara esta curva con la obtenida sin tener en cuenta la incertidumbre en la relación de vulnerabilidad.

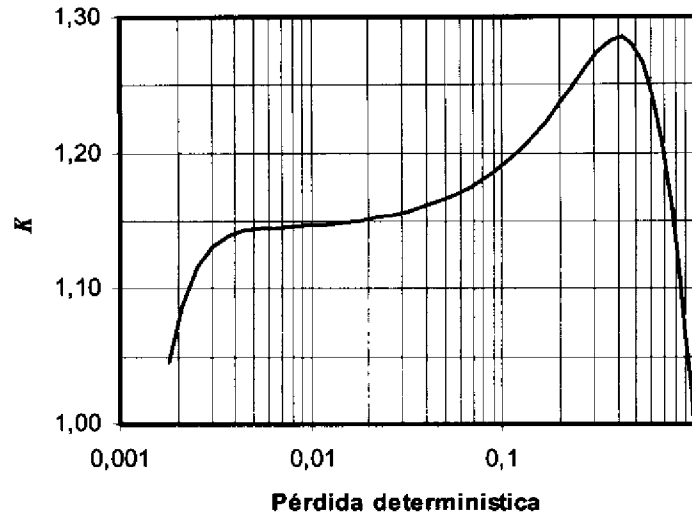
**Figura 2.1-10.4 Tasa de excedencia de pérdidas,  $\nu(y)$ , calculada con la tasa de excedencia de intensidades y las curvas de vulnerabilidad de las figuras 2.1-10.1 y 2.1-10.2, respectivamente. Dos casos se presentan: vulnerabilidades determinísticas e inciertas.**



Nótese en la figura 2.1-10.4 que, para una tasa de excedencia dada o periodo de retorno, la pérdida asociada para la vulnerabilidad incierta es mayor que la pérdida asociada al caso determinístico, el cual es el efecto usual de la incertidumbre en las funciones de vulnerabilidad. Por lo tanto, es claro que para valorar la incertidumbre, las pérdidas calculadas sin tenerla en cuenta deben ser multiplicadas por un factor mayor a 1. En el texto principal este factor ha sido llamado  $K$ , definido como la relación entre pérdidas asociadas a un periodo de retorno considerando vulnerabilidad incierta y las pérdidas asociadas al mismo periodo de retorno pero ignorando la incertidumbre en la relación de vulnerabilidad. La figura 2.1-10.5 muestra el factor  $K$  en función de pérdidas determinísticas para el ejemplo desarrollado en este apéndice.

Como se puede apreciar, el cálculo exacto del factor  $K$  es problemático y requiere de información detallada sobre la fragilidad de la estructura. Dentro del alcance de este proyecto, es poco probable que la información esté disponible. Para resolver parcialmente este problema, se propone la aproximación de primer orden que será descrita en los siguientes párrafos.

**Figura 2.1-10.5 Factor K, descrito como una función de las pérdidas determinísticas.**



Se asumirá que, dado un evento con intensidad  $I$ , las pérdidas tienen la distribución de Rosenblueth (1981), es decir, una función de densidad de probabilidades consistente en dos masas de probabilidades de valores  $P_1$  y  $P_2$  en  $y_1$  y  $y_2$ , respectivamente. Formalmente,

$$p(y|I) = P_1\delta(y_1) + P_2\delta(y_2) \quad (2.1-10.5)$$

donde  $P_1 + P_2 = 1$  y  $\delta$  es la función Delta de Dirac. Bajo estas suposiciones

$$\Pr(Y > y | I) = \begin{cases} 0 & \text{if } y < y_1 \\ P_1 & \text{if } y_1 \leq y < y_2 \\ 1 & \text{if } y \geq y_2 \end{cases} \quad (2.1-10.6)$$

de donde se sigue que

$$v(y) = - \int_0^{I_1} \frac{d\lambda(I)}{dI} 0 dI - P_1 \int_{I_1}^{I_2} \frac{d\lambda(I)}{dI} dI - \int_{I_2}^{\infty} \frac{d\lambda(I)}{dI} dI \quad (2.1-10.7)$$

donde  $I_1 = V^{-1}(y_1)$  y  $I_2 = V^{-1}(y_2)$ . De la ecuación 2.1-10.7, y recordando que  $\lambda(\infty) = 0$ , la siguiente expresión puede ser obtenida:

$$v(y) \approx P_1\lambda(I_1) + P_2\lambda(I_2) \quad (2.1-10.8)$$

La ecuación 2.1-10.8 es una aproximación al valor exacto de  $v(y)$ . Sin embargo, se puede apreciar que esta aproximación es más fácil de calcular que el valor exacto. Si, como es común, la pérdida dada una intensidad se asume que tiene una distribución Beta, entonces  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $y_1$  y  $y_2$  se pueden calcular con las siguientes expresiones:

$$y_1 = \frac{a^2 + a(b+2) + b + 1 - \sqrt{(a+1)(b+1)(a+b+1)}}{(a+b+2)(a+b+1)} \quad (2.1-10.9)$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{ab(a+b+2)^2}{((a^2 - b - b^2 + a)u + (a+b)^2 + ab^2 + a^2b + a + b)(a+b)} \quad (2.1-10.10)$$

$$u = \sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{a+b+1}} \quad (2.1-10.11)$$

$$P_2 = 1 - P_1 \quad (2.1-10.12)$$

$$y_2 = \frac{1}{P_2} \left( \frac{a}{a+b} - P_1 y_1 \right) \quad (2.1-10.13)$$

donde  $a$  y  $b$  son los parámetros de la distribución Beta relacionada al valor esperado de la pérdida y su varianza de la siguiente manera:

$$a = \frac{1 - V(I) - V(I) C^2(I)}{C^2(I)} \quad (2.1-10.14)$$

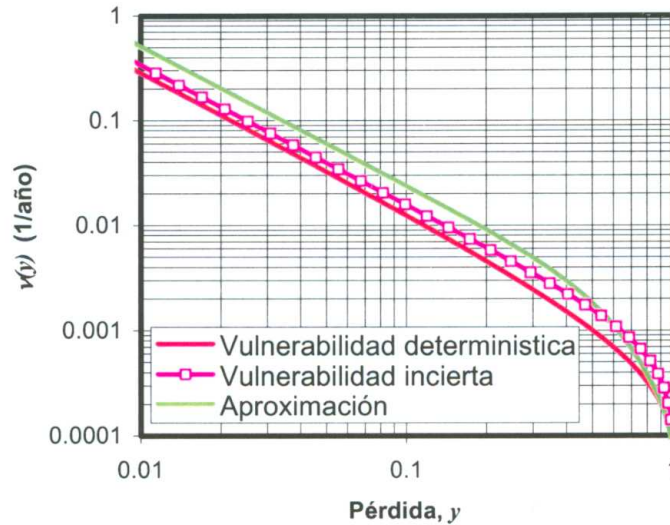
$$b = a \left[ \frac{1 - V(I)}{V(I)} \right] \quad (2.1-10.15)$$

donde

$$C(I) = \frac{\sigma(I)}{V(I)} \quad (2.1-10.16)$$

En la figura 2.1-10.6 se presenta un ejemplo de la tasa de excedencia de pérdidas calculada con la aproximación descrita.

**Figura 2.1-10.6 Aproximación a la tasa de excedencia de pérdidas calculada usando la distribución de Rosenblueth. Es comparada con el valor exacto (“Vulnerabilidad incierta”) y el caso de vulnerabilidad determinística.**



### Apéndice 2.1-11 Derivación de las reglas de agregación de pérdidas propuestas

Se desea obtener la pérdida económica total en un país con un período de retorno  $T_r$  debido a desastres naturales. La tasa de excedencia de las pérdidas para la  $i$ -ma ciudad se puede modelar como:

$$v_i(y_i) = K_i(y_i)^{\rho_i} \quad \rho_i < 0 \quad (2.1-11.1)$$

donde  $y_i$  es el valor de la pérdida en la ciudad,  $K_i$  y  $\rho_i$  son parámetros de la función de la tasa de excedencia de pérdidas. El valor de  $\rho_i$  es la pendiente de la curva  $v_i$  versus  $y_i$  en escala logarítmica. Suponiendo que se conocen las pérdidas para las ciudades más importantes en el país para el período de retorno  $T_r = 1/v_0$ . El valor  $K_i$  puede ser calculado de 2.1-11.1:

$$K_i = \frac{v_0}{(p_i)^{\rho_i}} \quad (2.1-11.2)$$

donde  $p_i$  es la pérdida en la  $i$ -ma ciudad con período de retorno  $T_r$ . Considérese que hay dos ciudades en el país y están suficientemente lejos como para que sus pérdidas sean independientes la una de la otra. En este caso, la tasa de excedencia de la pérdida total es la suma de las tasas de excedencia de las pérdidas individuales:

$$v(y) = v_1(y) + v_2(y) \quad (2.1-11.3)$$

Se esta buscando el valor de  $y$  para el cual  $v(y) = v_0$ . Reemplazando 2.1-11.1 y 2.1-11.2 e la ecuación 2.1-11.3,

$$v_0 = \frac{V_0}{(p_1)^{\rho_1}} y^{\rho_1} + \frac{V_0}{(p_2)^{\rho_2}} y^{\rho_2} \quad (2.1-11.4)$$

$$1 = \frac{1}{(p_1)^{\rho_1}} y^{\rho_1} + \frac{1}{(p_2)^{\rho_2}} y^{\rho_2} \quad (2.1-11.5)$$

Por simplicidad, se asume que  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ . En vista de esto, la ecuación 2.1-11.5 puede entonces ser re-escrita como:

$$y^\rho = p_1^\rho + p_2^\rho \quad (2.1-11.6)$$

La ecuación 2.1-11.6 es entonces la regla de combinación para el caso de pérdidas independientes.

Se propone calcular el coeficiente  $\rho$  con la curva de tasa de excedencia de pérdidas de la ciudad que tiene la mayor pérdida para el período de retorno seleccionado, calculado usando una función de vulnerabilidad determinística; esta pérdida se denominará  $y_m$ .

Por ejemplo, considerando la siguiente tasa de excedencia de intensidad, típica de la amenaza sísmica:

$$\lambda(I) = \left( \frac{I_0}{I} \right)^r \quad (2.1-11.7)$$

donde  $I$  representa la intensidad y  $I_0$  y  $r$  son parámetros. Además, teniendo en cuenta la siguiente función de vulnerabilidad, también tomada de la amenaza sísmica:

$$V(I) = 1 - \exp \left\{ \ln 0.5 \left( \frac{I}{\gamma} \right)^\alpha \right\} \quad (2.1-11.8)$$

donde  $\alpha$  y  $\gamma$  son parámetros. Si la función de vulnerabilidad es determinística, entonces la tasa de excedencia de pérdidas  $y$  es igual a la tasa de excedencia de la intensidad que produce esta pérdida:

$$v(y) = \lambda[I(y)] \quad (2.1-11.9)$$

$I(y)$  puede ser obtenido invirtiendo la ecuación 2.1-11.8:

$$I(y) = \gamma \ln(2)^{-1/\alpha} [-\ln(1-y)]^{1/\alpha} \quad (2.1-11.10)$$

y de la ecuación 11.9 se tiene que

$$v(y) = \left[ \frac{I_0 \ln(2)}{-\ln(1-y)} \right]^{r/\alpha} \gamma^{-r} \quad (2.1-11.11)$$

Recordando que  $\rho$  puede considerarse como la pendiente de la curva de tasas de excedencia de pérdidas,  $v(y)$ , en la escala log-log, se sigue que

$$\rho = \frac{d \ln v(y)}{d \ln y} = y \frac{d \ln v(y)}{dy} \quad (2.1-11.12)$$

valorado en  $y=y_m$ . En vista de esto,  $\rho$  puede ser calculado de las ecuaciones 2.1-11.11 y 2.1-11.12, conduciendo a:

$$\rho = \frac{ry_m}{\alpha(1-y_m)\ln(1-y_m)} \quad (2.1-11.13)$$

que es el valor que debe usarse en la regla de combinación dada en al ecuación 2.1-11.6.